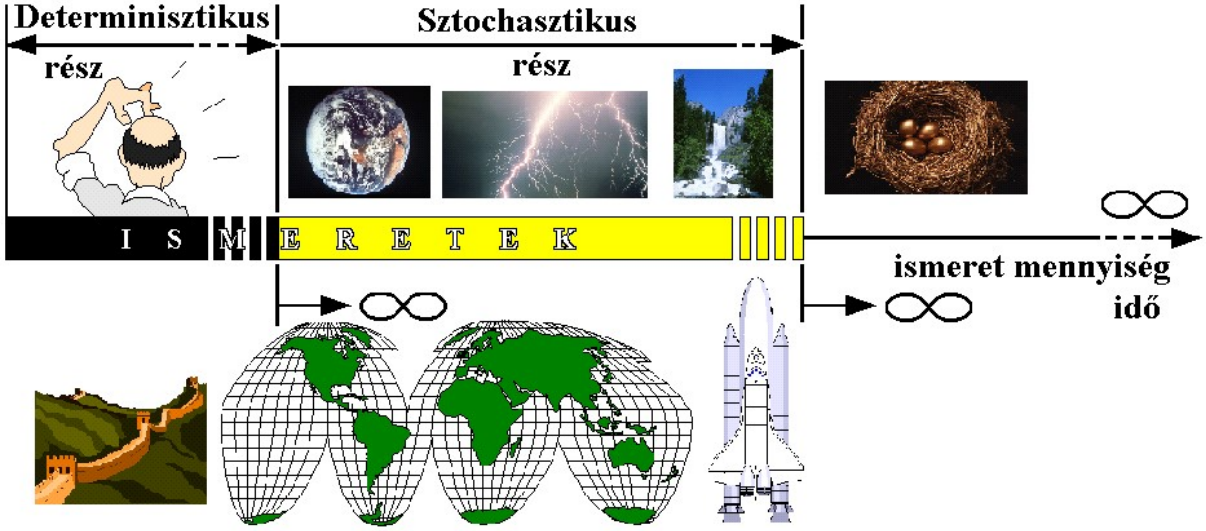
VÉGES ÉS VÉGTELEN

Ha valaki az ember alkotta dolgokról, rendszerekről és elméletekről elkezd gondolkozni, néha meglepő következtetésekre juthat. Így járhatunk akkor is, ha a matematikában és az élet más területein használatos *végtelen* fogalmát megpróbáljuk körüljárni és értelmezni.

A vizsgálatok során nem árt figyelemmel lenni saját korlátainkra, nevezetesen arra, hogy minden új elmélet az adott kor ismereti szintjén születik, más szavakkal valamely megállapítás a társadalom addig megszerzett, és ezek alapján értelmezett ismereteinek bázisán jön létre.

Szinte közhelyként hat az a kijelentés, hogy az emberi megismerés folyamata *végtelen*. Miért is mondjuk ezt? Szolgáljon magyarázatul az 1. ábra!



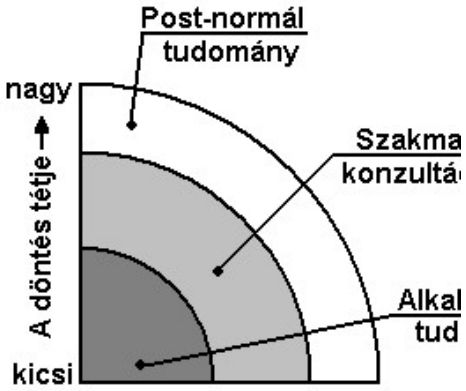
1. ábra Az emberi megismerés folyamata

Az emberiség által megszerezhető ismeretek gyakorlatilag három csoportba sorolhatók. Az első csoportba a biztos, vagy biztosnak vélt ismeretek sorolják. Eric A. Ash mondja a Magyar Tudomány 2007. első számában megjelent, „A tudós számára elfogadható hit” című tanulmányában, hogy: „A tudósok bizonyos dolgokat biztosan tudnak”. Ezzel az állítással ugyan nem értek egyet, de végül is, ez lenne az, az ismeretmennyiség, amelyet már úgy tűnik, nincs értelme tovább kutatni, hiszen itt látszólag mindennek a legapróbb részlete is ismert. Ez az a tudás mennyiség, amelyet a különböző szintű iskolákban az új generációval megismertetünk. Az ismeret mennyiségnek ez a biztosnak vagy determinisztikusnak is nevezhető része azonban néha komoly meglepetéseket okozhat és a tudományos szemlélet akár generálisan is megváltozhat.

Az ismeretek második csoportja, ismereteink sztochasztikusnak is nevezhető része, gyakorlatilag azt a tudás anyagot tartalmazza, amely még nem teljes, amelyben még vannak bizonytalan részek, és amelyeket folyamatosan kutatni kell. Ennél az ismeret csoportnál komoly szerepet tulajdonítunk – jobb híján - a *véletlen*nek, ami önmagában is egy meglehetősen bizonytalanul értelmezhető dolog. Az ide sorolható ismeretek nagy vonalakban leírják a vizsgált jelenséget, megismerhetővé teszik annak trend jellegű változását, de a jelenségek trendtől eltérő voltának értelmezésére tudásunk jelenlegi szintjén kénytelenek vagyunk a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika elméletét, vagy más matematikai apparátust alkalmazni.

Az ismeretek harmadik csoportja az, amelyekről még semmit sem tudunk, csupán azt látjuk, hogy tudásunk – dacára ismereteink robbanás-szerű növekedésének – még mindég hiányos.

Az ismeretek fajtáira, egyben korunk jellemzésére valamin ezzel együtt az ismeretek alkalmazásával járó kockázat mértékére szellemes képet mutat a 2. ábra.



2. ábra Az alkalmazott tudományok és a kockázat kapcsolata. (Bezegh, után (Bezegh, A., 2006.))

Az ábrán a biztosnak vélt ismeretek alkalmazott tudományként jelennek meg. Minél hiányosabbak viszont az ezen túli ismereteink (a szakmai konzultációval jellemzett, illetőleg a post-normális tudományként aposztrofált tartományban) annál nagyobb az általunk létrehozott rendszer bizonytalansága és egyre inkább növekszik döntéseink tétje is.

Szintén közhely-szerű megállapítás, hogy minél többet tudunk, annál inkább látjuk, hogy milyen elenyésző a tudásunk. Az ismeret-szerzés folyamatában az emberiség tehát azt tapasztalta, hogy bármilyen mértékben is növekszik a tudás, mindig marad olyan, amit még nem ismerünk. Ez a tapasztalat vezetett ahhoz a megállapításhoz, hogy az ismeret-szerzés folyamata *végtelen*.

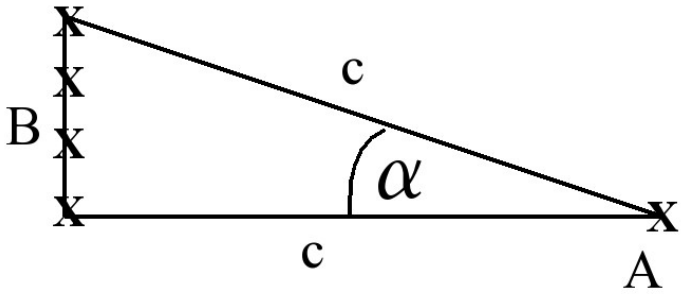
A dolgok általános elméleti megközelítésén túl, most vizsgáljuk meg saját környezetünket! Életünket valójában mérhető nagyságú *véges* környezetben, meghatározott, így véges feltételek mellett, a természet által megszabott *véges* ideig élhetjük le. Környezetünkben tehát mindenütt mérhető nagyságú hosszakkal, területekkel és térfogatokkal, valamint mérhető, tehát *véges* nagyságú idővel találkozunk. Mondhatjuk azt is, hogy életünk *véges* négydimenziós térben zajlik. Ezzel szemben a matematikusok használják a *végtelen* fogalmát, amely gyakorlatilag önmagával definiált, valahogy így: ami megszámlálhatatlanul sok, az *végtelen*. Mi az a „megszámlálhatatlanul sok? Nem más, mint végtelenül sok, azaz a *végtelen* az nem más, mint *végtelen*.

Ennek ellenére állítom, hogy az emberiség jelenlegi tudásszintjén értelmezve, a *végtelen* az valójában nem lehet *végtelen*. Kövessük a következő okfejtést. Az emberek lakásokban élnek, A lakásokat mérhető nagyságú helységekből állnak. Több lakás együtt házat alkot, több ház utcát, vagy teret, ezek faluvá, várossá állnak össze. A települések és a köztük lévő tér együttesen többé – kevésbé (inkább kevésbé) logikusan megadott határokkal országokat alkotnak, az országok földrészeket töltenek ki, majd a földrészek, és a köztük lévő tenger együttesen a földgolyót adják, amely szintén véges területű. A bolygók a bolygóközi térrel együtt, amelyben a napjuk körül keringenek, galaxisokat alkotnak, ezek további csillagrendszereket hoznak létre, és így tovább. És minden, amely ebben a rendszerben előfordul, mérhető. Más megközelítésben, a Világ mérhető nagyságú, egymás részét képező és egymás melletti struktúrák sokaságából épül fel.

A halmazelmélet jelölésrendszerével (ahol az egymás részét képező halmazokat $\mathbf{S}_i$-vel jelöljük, $\mathbf{i} = 1,2, \ldots, \infty$) az előbb elmondottakat a következő módon lehetne leírni:

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots \subset S_n$$

De a matematikai statisztikában is bőven előfordul a *végtelen* fogalma. Például azt mondjuk, hogy *végtelen* elemszámú mintából számolt átlagérték megegyezik a várható értékkel. Ez elméletileg igaz, de a valóságban még senkinek sem sikerült találkoznia egyetlen várható értékkel sem. Már az elnevezése is félrevezető, mert ha például egy mérési sorozatban véletlenül annyit sikerülne mérnünk amennyi a várható érték, azt soha sem tudjuk meg, mert nincs viszonyítási alapunk. De ugyanez a probléma akkor is, amikor azt állítjuk, hogy az átlagérték szórása nulla, ha azt *végtelen* elemszámú mintából számoltuk. Belátható tehát, hogy a gyakorlat a *végtelen* fogalmával nem tud mit kezdeni. Még a *végtelen*nél kisebb léptékű dolgokkal is számos problémánk akad.



3. ábra Ábra a végtelen távolság definícójához

Az interneten, az akasha matematikai tárterületén található egy frappánsnak tűnő definíció a *végtelen*re: „*Végtelen* az a 'c' távolság, ahonnan nézve bármely véges elemű és véges méretű 'B' rendszer bármely pontjából az 'A' szemlélőpontba húzott egyenesek párhuzamosak egymással.” A definíció indoklása: „Amennyiben 'B' rendszer bármely pontjából az 'A'-ba húzott egyenesek nem párhuzamosak, szöget zárnak be egymással. A szög alapján pedig, kiszámolható az 'AB' távolság (szögfüggvények). Ha párhuzamosak, a távolságuk meghatározhatatlan (*végtelen*).” A definíció megértéséhez tekintsük meg a 3. ábrát!

A definíciót gyakorlati oldalról szemlélve, azonnal látszanak annak gyenge pontjai. Nevezetesen: a definíció csak akkor lenne igaz, ha minden ember szeme azonos élességgel látná a tárgyakat, az emberi szem felbontóképesség nem lenne optikai eszközökkel növelhető, továbbá, ha az így adódó távolságot nem lehetne megmérni. Ellenkező esetben ugyanis minden ember önálló végtelennel rendelkezne (a rövidlátók kisebbel, a távollátók nagyobbal), viszont újabb kutatási terület nyílna a matematikusok számára, nevezetesen az, hogy ezek az egyedi véletlenek milyen eloszlást követnek.

Szokták mondani, hogy a párhuzamos egyenesek csak a végtelenben metszik egymást, illetve ott találkoznak. Túl azon, hogy a párhuzamosság kérdése önmagában is megérne egy hosszabb vizsgálódást, az előbbi állítás elgondolkoztató. Ha igaz, akkor igaznak kell lennie egymástól tetszőleges-, akár végtelen távolságban lévő egyenesekre is. Ebből viszont az következik, hogy a „végtelen”-ben a végtelen távolságok nullára is redukálódhatnak. Úgy is mondhatnánk, hogy a „végtelen”-ben a tér beszűkül. De olyannyira beszűkül, hogy, meg is szűnik? Az egymástól végtelen távolságban lévő párhuzamos egyenesek találkozásának ugyanis ez a feltétele. És ha megszűnik, akkor mivé alakul át? Mi van olyankor, ha a párhuzamos egyenesek nem csupán találkoznak, hanem metszik is egymást? A tér önmaga negatívjába megy át? Láthatjuk, hogy ha megpróbálunk a végtelenre magyarázatot, vagy definíciót találni, újabb problémákkal találjuk szembe magunkat.

Vizsgáljuk meg a *végtelen* további megjelenési formáit is! Kétségtelen, hogy az egyszerű halandó, de még a tudós sem tudja elképzelni, mekkora távolság az egy fényév. Nincs olyan méret a földi környezetünkben, amihez ezt hasonlítani lehetne. Persze hasonló problémával találkozunk akkor is, amikor például egy kisnyugdíjastól megkérdezzük, hogy mennyi az 1 milliárd forint. Miután még nem látott ennyi pénzt életében, el sem tudja képzelni, hogy mekkora papírhalmazról van szó, befér-e egy közepes méretű bőröndbe, és ha befér, meg tudná-e emelni. A köznapi életben legfeljebb arra mondjuk, hogy *végtelen*, amit méretét tekintve el sem tudunk képzelni.

Manapság a tudósok azon vitatkoznak, hogy az univerzum tágul, vagy sem. A jelenlegi tudományos elképzelések szerint a világmindenség *végtelen* térfogatú. Így ha kiderül, hogy tágul, akkor önmaga egy konkrét mérettel nagyobb lesz. Azt viszont hogy tágul, csak úgy lehet megállapítani, ha tudjuk azt is, hogy mihez képest tágul, tehát eleve nem lehet *végtelen* térfogatú. Praktikusan az univerzum csak akkor tud tágulni, ha önmaga nem *végtelen*, és van egy önmagánál is nagyobb tér, amelyben elhelyezkedik, és így van helye a tágulásra.

Az előbbi okfejtés még akkor is igaz, ha figyelembe vesszük az anyag különböző halmazállapotait. Minden adott anyagi halmazállapothoz tartozik ugyanis egy térfogat, amelyben az adott anyagmennyiség elfér. A nyomás és hő hatására bekövetkező halmazállapot változás eleve térfogat változással jár. A térfogat változást viszont csak úgy lehet mérni, ha tudjuk, hogy a korábbi térfogat mennyi volt. Ott, viszont ahol valamit mérni lehet, *végtelen*ről nem beszélhetünk.

Egy kicsit mást jelent a *végtelen* ha például a végtelen sorok felől közelítjük. Közismert például a **sin*x*** függvény végtelen sora:

$$\mathbf{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots} \qquad \left(|\mathbf{x}|\right) < \infty$$

Minél több tagja van a sorozatnak, annál inkább közelít annak összege **sin*x***-hez. Itt tehát van viszonyítási alapunk, ha másra nem, mint arra, hogy a sorozat tagszámának változtatása milyen mértékben befolyásolja a függvény számítható értékét. Még azt is ki tudjuk számítani, hogy ez az előbbihez viszonyított eltérés hogyan csökken, ha a tagok számát növeljük. Mégis jóval a végtelen tagszám előtt megállunk, mert úgy ítéljük, hogy az eredmény már olyan közel van a valósághoz, hogy nincs értelme tovább pontosítani. A végtelent tehát itt a gyakorlat oldaláról közelítjük.

Ismét egy más megközelítése a problémának az, amikor azt akarjuk megfogalmazni, hogy mennyi az a végtelenül kicsi. Egyértelmű, hogy a végtelenül kicsi az, nulla. De ezzel még a problémát nem oldottuk meg, mert ha valami, például egy térfogat nulla, akkor az ahhoz kötődő paraméterek nem mérhetők. Gondoljunk itt a „minta” problematikájára. A matematikai statisztikában azt mondjuk, hogy a véletlen változó térfogata nulla, vagyis végtelenül kicsi. Praktikusan ez azt jelenti, hogy a mintának ez az eleme nem létezik, így elvileg adat sem rendelhető hozzá. Ennek ellenére a matematikai statisztika ilyen esetekben is feltételezi, hogy a minta vizsgált eleme valamilyen paraméter értéket hordoz.

Vizsgáljuk meg most a végtelen kérdését arról az oldalról is, hogy az anyag energiává alakulhat és fordítva, az energia is anyaggá válhat. Itt kissé már problémáim vannak. Odáig még értem a dolgot, hogy az anyag energiává alakulhat, hiszen ha például elégetjük a szenet, akkor hőenergia szabadul fel. Azt is értem, hogy ha ezzel a hőenergiával vizet melegítünk, akkor a vízből vízgőz keletkezhet, tehát halmazállapot változás jött létre. Még az is érthető, hogy ez a felszabaduló hőenergia gyorsíthatja a kémiai reakciókat, ekkor ugyanis új anyag jön létre, de anyagból és energiából és nem tisztán energiából. Egy kétségtelen,

helyigénye csak az anyagnak van. Ez még akkor is igaz, ha még a tér görbülését is bekalkuláljuk a vizsgálatokba.

Újabban a zöld mozgalmak kapcsán találkozhatunk a végtelen egy más megnevezésével. Az önmaguk szakértelmét másokhoz viszonyítva végtelennek tartó zöldek sokszor használják a „felbecsülhetetlen érték" kifejezést, de ennek értelmezésével érthető okokból nem foglalkoznak. Ha ugyanis valaminek felbecsülhetetlenül nagy az értéke, akkor ahhoz viszonyítva minden egyéb elhanyagolható. Tehát a „felbecsülhetetlen érték" valójában *végtelen* nagyságú érték. Ez az értelmezés például egy beruházás esetében a költségkalkulációk készítését gyakorlatilag ellehetetleníti. Ha ugyanis a várható negatív következmények elemzése során csak egyetlen tételnek is felbecsülhetetlen értéke van, az azt jelenti, hogy végtelen nagyságú kár keletkezik, tehát a beruházásról szó sem lehet. Bár az ilyen jellegű filozofálásoknak csak békeidőben lehet tere, mégis meggondolandó, hogy valóban vannak felbecsülhetetlen, vagy más szóval, pótolhatatlan értékek. Például magyar vonatkozásban ilyen a Szent Korona. Furcsa paradoxon viszont, hogy háború esetén a dolgok értéke hirtelen megváltozik, és az addig felbecsülhetetlen értékek lényegtelenné válhatnak. Gondoljunk itt például Drezda bombázására a II. Világháborúban. Nem hinném ugyanis, hogy az amerikaiak a bombázásról hozott döntéskor bekalkulálták volna a drezdai képtárban okozott felbecsülhetetlen mértékű kárt is.

Visszatérve az eredeti problémához, szerintem belátható, hogy *végtelen* pedig nincs. Valószínűleg a matematikusok is érezték, hogy valahol sántít a dolog, mert különbséget tesznek a „megszámlálhatóan sok" és a „végtelenül sok" között.

Ha pedig vannak olyanok, akik szerint mégis van *végtelen,* akkor valószínűleg nekik is igazuk van, hiszen egyetlen helyen a lelki szférában helye van ennek a fogalomnak. Itt ugyanis nem a mérhetőség a domináns. Ezért helyesen állítjuk, hogy például az emberi fantáziának, a szeretetnek és már pozitív és negatív emberi tulajdonságoknak nincsenek határai.

Dr. Füst Antal

Irodalom:

Ash, E.A., 2007.: A tudós számára elfogadható hit. Magyar Tudomány, 2007/01.

Bezegh, A., 2006.: Fejezetek a környezeti kockázatok menedzsmentjéből. Az előadás fóliái. A Budapesti Corvinus Egyetem Környezetgazdaságtani és Technológiai Tanszékének honlapja (2006. július 8.)